Dossier n°71 : Exemples de mise en évidence de la relation de la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 13 juin 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

La notion de dérivation et de tangente à une courbe sont introduites en classe de Première. Ces notions sont reprises et approfondies en terminale.

Aucune compétence n'est exigible au lycée concernant notre sujet, on peut donc présenter ce dossier en TP.

Je choisis donc de situer ce dossier en Première et en Terminale S.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

La notion de dérivation est introduite dans les classes de Première de la façon suivante :

Définition 1 :

Soit f une fonction. Soit a un point de son ensemble de définition.

On dit que **f est dérivable au point a** si la fonction $h \to \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle l en zéro.

Cette limite l est appelée **le nombre dérivé de f en au point a**. On le note f'(a).

On dit que **f est dérivable sur l'intervalle I** si f est dérivable en tout point de I.

On définit ensuite la notion de tangente à une courbe.

Définition 2 :

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable au point a. **La tangente à $\mathcal{C}$ au point A(a ; f(a))** est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est f'(a).

On remarque donc que le nombre dérivé au point a a un lien avec la tangente au point A(a ; f(a)).

On peut alors se demander comment sont placées ces tangentes par rapport à la courbe représentative de la fonction étudiée et si ce positionnement a également un lien avec la dérivée de la fonction.

L'objectif de ce dossier est donc de mettre en évidence sur l'étude d'une fonction particulière et d'établir dans le cas général un lien entre la fonction dérivée et la position de la courbe par rapport à ses tangentes.

II.2 A propos des exercices.

J'ai choisi de vous présenter deux exercices aux objectifs différents :

- l'exercice n°1 propose d'étudier la position d'une courbe par rapport à ses tangentes dans un cas particulier et de faire une conjecture sur le lien à établir en étudiant la monotonie de la fonction dérivée (niveau Première S) ;

- l'exercice n°2 propose de montrer dans le cas général des fonctions dérivables le lien entre la monotonie de la fonction dérivée et la position de la courbe par rapport à ses tangentes. On proposera également une application à la fonction logarithme (niveau Terminale S).

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction sinus et de ses tangentes sur $[0 ; 2\pi]$.

Objectif : Mettre en évidence le lien entre la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes sur un exemple.

Méthode :

- Déterminer une équation de la tangente à la courbe en un point a de $[0 ; 2\pi]$.
- Comparer les fonctions sinus et $g : x \to x \cos a - a \cos a + \sin a$ qui a en fait pour représentation graphique la tangente déterminée précédemment.
- Conclure
- Déterminer les variations de la dérivée de la fonction sinus et faire une conjecture.

Outils :

- Définition 2 ;
- *Définition 3 :*
  Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle **I**. On dit que **C_f est au-dessus de C_g** si $f - g \geq 0$.
- *Théorème 4 :*
  Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **I** de dérivée f'.
  - Si f' est nulle sur **I** alors f est constante sur **I**.
  - Si f' est positive sur **I** alors f est croissante sur **I**.
  - Si f' est négative sur **I** alors f est décroissante sur **I**.

La réciproque de ce théorème est vraie mais ne nous est pas utile ici.

III.2 Exercice n°2.

But :

- Démontrer le théorème suivant, permettant le lien entre la monotonie de la dérivée et la position de la courbe par rapport à ses tangentes :
  Soit f une fonction dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition. Soit [c ; b] un intervalle contenant le réel a appartenant à l'ensemble de définition.
  - Si f' est croissante sur [c ; b] alors C_f est au-dessus de sa tangente au point A(a ; f(a)).
  - Si f' est décroissante sur [c ; b] alors C_f est au-dessous de sa tangente au point A(a ; f(a)).
- Donner une application de ce théorème.

Méthode : Distinguer les cas où f' est décroissante et croissante au voisinage de a.

Outils :

- Définition de la monotonie d'une fonction ;
- Définition 2 ;
- *Inégalité de la moyenne :*
  Si f est une fonction continue sur [a ; b] $(a \leq b)$ et si pour tout $x \in [a ; b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

- Définition 3 ;
- Fonction logarithme.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°60 p 118, Terracher 1ère S 2001, modifié).

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.

1. Soit $a \in [0 ; 2\pi]$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse a.
2. Comparer sur $[0 ; 2\pi]$ les fonctions f et $g : x \to x \cos a - a \cos a + \sin a$.
3. En déduire la position de la tangente au point d'abscisse a par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. Calculer la dérivée f' de f et donner le sens de variation de f' sur $[0 ; 2\pi]$.
5. Quelle remarque peut-on faire si on compare les résultats obtenus aux questions 3 et 4 ?

IV.2 Exercice n°2 (TP4 p 65 , Transmath TS 1998, modifié).

On considère une fonction f dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On note Δ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A(a ; f(a) (a est un nombre fixe dans $\mathcal{D}_f$).

Le but de cet exercice est d'étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

I) Cas où f' est croissante au voisinage de a.

1. On suppose que f' est croissante sur un intervalle [a ; b].
   a) Lorsque $a \leq x \leq b$, donner un encadrement de f'(x).
   b) En utilisant l'inégalité de la moyenne, prouver que pour tout x de [a ; b], $f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a)$.
   c) En déduire que sur l'intervalle [a ; b], la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ
2. On suppose que la fonction dérivée f' est croissante sur l'intervalle [c ; a].
   a) Démontrer que pour tout x de [c ; a], $f(a) - f(x) \leq f'(a)(a-x)$.
   b) En déduire que sur l'intervalle [c ; a], la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ.
3. On suppose que la fonction dérivée f' est croissante sur un intervalle [c ; b] avec $c < a < b$. d'après les résultats précédents, quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ sur l'intervalle [c ; b] ?

II) Cas où f' est décroissante au voisinage de a.

On suppose que la fonction dérivée f' est décroissante sur un intervalle [c ; b] avec $c < a < b$.

En procédant comme au paragraphe précédent, étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

III) Conclusion :

Enoncer le théorème ainsi démontré établissant un lien entre la monotonie de la dérivée et la position de la courbe représentative par rapport aux tangentes.

IV) Application :

En considérant la fonction $f : x \to \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^*_+$, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\ln(x) \leq 1 - x.$$